

2028 届普通高等学校招生全国统一考试

青桐鸣大联考(高一)

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$, 则命题 p 的否定为

A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0$

2. 不等式 $\frac{x-3}{2x} \leq 0$ 的解集为

A. $\{x | 0 < x \leq 3\}$

B. $\{x | 0 \leq x < 3\}$

C. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$

D. $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$

3. 设甲:两个三角形全等;乙:两个三角形面积相等,则

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲是乙的既不充分也不必要条件

4. 已知 $\{x | a \leq x \leq 1\} (a < 1)$ 是不等式 $bx^2 + 4x + 1 \geq 0 (b \neq 0)$ 的解集,则 $a + b =$

A. 1

B. $-\frac{1}{5}$

C. -5

D. $-\frac{26}{5}$

5. 设 $A = \{x | x \text{ 是树人中学今年高三的历史类男生}\}$, $B = \{x | x \text{ 是树人中学今年高三的物理类女生}\}$, $C = \{x | x \text{ 是树人中学今年高三的历史类学生}\}$, $D = \{x | x \text{ 是树人中学今年}$



高三的女生},则下列一定正确的是

A. $C \subsetneq B$

B. $C \subseteq A$

C. $C \cap D = \emptyset$

D. $A \cap B = \emptyset$

6. 设集合 $A = \{1, 9\}$, $B = \{x | x^2 \in A\}$, 则 B 中的元素个数为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

7. 若 $a^2 + b = 2$, 则 $2a^2b + b^2$ 的最大值为

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

8. 某小区要用篱笆围出一块面积为 9 m^2 的直角三角形花坛, 则这个花坛周长(单位: m)的最小值为

A. $4 + 4\sqrt{2}$

B. $6 + 6\sqrt{2}$

C. $4 + 3\sqrt{2}$

D. $6 + 3\sqrt{2}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 下列命题中为真命题的有

A. 所有不为整数的有理数构成的集合为 $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

B. 所有无理数构成的集合为 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

C. 所有不大于零的整数构成的集合为 $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$

D. 设集合 $A = \{x | x \leq 0\}$, 则所有正实数构成的集合为 $\mathbb{R} \setminus A$

10. 已知 $0 < 2y < x < 4$, 则下列说法一定正确的有

A. $x > y$

B. $x > y^2$

C. $\frac{1}{x} > \frac{y}{2}$

D. $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} < 5$

11. 定义 $\&(a, b) = a^2 + 2b$, 若 $n \times \&(m, 1) = m \times \&(1, n)$, $m > 0$, 则下列说法一定正确的有

A. $\frac{n}{m} < n + 1$

B. $2n(1 - m) > m$

C. $4n < 5$

D. $m^2 \leq mn$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 若 $-3 < x \leq -1$, $27 < y \leq 81$, 则 $\frac{y}{x^2}$ 的取值范围是_____.

13. 若命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2ax + 4a + 5 < 0$ ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知 x, y 均为实数, 设集合 $A = \{x, x^2y\}$, $B = \{y, xy, 2\}$, 已知 $A \subseteq B$, 则 $x + y$ 所有可能的取值的个数为_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知 a 为实数，集合 $A = \{x | (x-a)(x-a^2) = 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. 设命题 $p: x \in A$, $q: x \in B$.

(1) 若集合 $C = \{-1, 0, 1\}$, 且集合 A 中有且仅有一个元素，求 $A \cup (B \cup C)$;

(2) 若 p 是 q 的充分条件，求 a 的值.

16. (15 分)

现有关于 x 的不等式 $ax^2 - ax - 1 < 0$, a 为实数.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求该不等式的解集;

(2) 若该不等式对于任意的 x 恒成立，求 a 的取值范围.

17. (15 分)

已知正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 4$.

(1) 求 $(a+b)c$ 的最大值;

(2) 求 $(2a+b)(b+2c)$ 的最大值.

18. (17 分)

设集合 $A = \{x \mid m < x \leq 2m - 1\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

(1) 若 $m = 2$, 求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$;

(2) 设 $m > \frac{3}{2}$, 若 A 中有且仅有一个整数元素, 求实数 m 的取值范围.

19. (17 分)

设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x \mid |x - m| \leq 1\}$, $C = \{x \mid x^2 - 2kx + k^2 - 4 \leq 0\}$, m, k 均为实数.

(1) 当 $k = 1$ 时, 求 $A \cup C$;

(2) 证明: 当 $|m - k| \leq 1$ 时, $B \subseteq C$;

(3) 若 $A \subseteq C$, $A \cap B \neq \emptyset$, 且 $m + k \in A$, $m - k \in A$, 求 m 与 k 的值.

装

订

线

2028 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高一)
数学 参考答案

1. C 【解析】由全称量词命题的否定为存在量词命题,结论需取否定,所以命题 p 的否定为 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$.
故选 C.

2. A 【解析】原式等价于 $\begin{cases} x(x-3) \leq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 故其解集为 $\{x | 0 < x \leq 3\}$.
故选 A.

3. A 【解析】两个三角形全等,则两个三角形面积相等;但面积相等的两个三角形不一定全等.所以甲是乙的充分不必要条件.
故选 A.

4. D 【解析】由题意可得 $a, 1$ 为方程 $bx^2 + 4x + 1 = 0$ 的根,由韦达定理可得 $\begin{cases} a+1 = -\frac{4}{b}, \\ a \times 1 = \frac{1}{b}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = -5, \end{cases}$ 故 $a+b = -\frac{26}{5}$.
故选 D.

5. D 【解析】选项 A 表示树人中学今年高三的历史类学生,真包含于树人中学今年高三的物理类女生中,而历史类学生与物理类学生并不存在交集,故 A 错误;对于 B 选项,历史类男生包含于历史类学生而不是反过来,故应该是 $A \subseteq C$,故 B 错误; $C \cap D = \{x | x \text{ 是树人中学今年高三的历史类女生}\}$,不一定为空集,故 C 错误;一个人不可能既是历史类男生又是物理类女生,所以 $A \cap B = \emptyset$,故 D 正确.
故选 D.

6. C 【解析】解 $x^2 = 1, x^2 = 9$ 分别可得 $x = \pm 1, x = \pm 3$,故 $B = \{-3, -1, 1, 3\}$,故 B 中共有 4 个元素.
故选 C.

7. C 【解析】注意到 $2a^2b + b^2 = 2(2-b)b + b^2 = b(4-b) \leq \frac{(b+4-b)^2}{4} = 4$,当且仅当 $a=0, b=2$ 时等号成立.
故选 C.

8. B 【解析】设花坛一直角边长为 x ,则另一直角边长

为 $\frac{2 \times 9}{x} = \frac{18}{x}$,故斜边长为 $\sqrt{x^2 + \left(\frac{18}{x}\right)^2}$,所以花坛周长为 $x + \frac{18}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{18}{x}\right)^2}$,其中 $x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{18}{x}} = 6\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2 + \left(\frac{18}{x}\right)^2} \geq \sqrt{2\sqrt{x^2 \cdot \left(\frac{18}{x}\right)^2}} = 6$,当且仅当 $x = 3\sqrt{2}$ 时,两个等号同时成立,故花坛周长的最小值为 $6 + 6\sqrt{2}$.
故选 B.

9. CD 【解析】对于 A,易知有理数集 $\mathbf{Q}$ 由整数集 $\mathbf{Z}$ 与不为整数的有理数相并所得,故不为整数的有理数构成的集合为 $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$,故 A 错误;
对于 B,易知实数集 $\mathbf{R}$ 由有理数集 $\mathbf{Q}$ 与无理数集相并所得,故无理数集为 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$,故 B 错误;
对于 C,易知不大于零的整数构成的集合为 $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}^*$,故 C 正确;
对于 D,易知正实数集 $\{x | x > 0\} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{A}$,故 D 正确.
故选 CD.

10. ABD 【解析】对于 A,由 $y > 0$ 可知 $x > 2y > y$,故 A 正确;
对于 B,注意到 $0 < 2y < x, 0 < 2y < 4$,故 $4y^2 < 4x$,故 $x > y^2$,故 B 正确;
对于 C 选项,取 $x = 3, y = 1$,此时 $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \frac{y}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$,故 C 错误;
对于 D,注意到 $\sqrt{2y} < \sqrt{x}$,故 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{2} \times \sqrt{2y} < (\sqrt{2} + 1)\sqrt{x} < 2(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 2 < 5$,故 D 正确.
故选 ABD.

11. AC 【解析】对于 A 选项,注意到 $n(m^2 + 2) = m(1 + 2n)$,又因为 $m > 0, m = n(m^2 + 2) - 2mn = n(m^2 - 2m + 2), n = \frac{m}{m^2 - 2m + 2}, m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 \geq 1$,故 $n > 0$,故 $\frac{n}{m} = \frac{1 + 2n}{m^2 + 2} < \frac{2n + 2}{2} = n + 1$,A 正确;
对于 B 选项,注意到当 $m = n = 1$ 时, $n(m^2 + 2) = m(1 + 2n)$,此时 $2n(1 - m) = 0 < m$,B 错误;



对于 C 选项, $n = \frac{m}{m^2-2m+2} = \frac{1}{m+\frac{2}{m}-2} \leq$

$$\frac{1}{2\sqrt{m \cdot \frac{2}{m}-2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} < \frac{5}{4}, \text{ 当且仅当}$$

$m=\sqrt{2}$ 时等号成立, 故 $4n < 5$, C 正确;

对于 D 选项, $mn = \frac{m^2}{m^2-2m+2} \leq m^2$, D 错误.

故选 AC.

12. $\left\{\frac{y}{x^2} \mid 3 < \frac{y}{x^2} \leq 81\right\}$ 【解析】显然 $1 \leq x^2 < 9$, 故 $\frac{1}{9} <$

$$\frac{1}{x^2} \leq 1, \text{ 故 } 3 < \frac{y}{x^2} = y \cdot \frac{1}{x^2} \leq 81, \text{ 故取值范围为 } \left\{\frac{y}{x^2} \mid 3 < \frac{y}{x^2} \leq 81\right\}.$$

13. $\{a \mid -1 \leq a \leq 5\}$ 【解析】易得“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2ax + 4a + 5 \geq 0$ ”是真命题, 故 $\Delta = (-2a)^2 - 4(4a + 5) = 4(a^2 - 4a - 5) = 4(a-5)(a+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 5$, 故取值范围为 $\{a \mid -1 \leq a \leq 5\}$.

14. 4 【解析】由互异性知 $x \neq x^2y, y \neq xy, y \neq 2, xy \neq 2$, 得 $x \neq 1, y \neq 0, x \neq 0, xy \neq 1, y \neq 2, xy \neq 2$, 于是 $x^2y - xy = xy(x-1) \neq 0$, 现分类讨论: 当

$\begin{cases} x^2y=y, \\ x=2 \end{cases}$ 时, $4y = y$, 这与 $y \neq 0$ 矛盾; 当

$\begin{cases} x^2y=y, \\ x=xy \end{cases}$ 时, 由 $x \neq 0$ 知 $y=1$, 故 $x^2=1$, 由 $x \neq 1$

知 $x=-1$, 此时 $A=\{-1, 1\}, B=\{-1, 1, 2\}$, 符合题意; 当

$\begin{cases} x^2y=2, \\ x=y \end{cases}$ 时, $x^3=2, x=y=\sqrt[3]{2}$, 此时

$A=\{\sqrt[3]{2}, 2\}, B=\{\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 2\}$, 符合题意; 当

$\begin{cases} x^2y=2, \\ x=xy \end{cases}$ 时, 显然 $y=1$, 此时 $x=\pm\sqrt{2}$, 此时

$A=\{\sqrt{2}, 2\}, B=\{1, \sqrt{2}, 2\}$ 或 $A=\{-\sqrt{2}, 2\}, B=$

$\{1, -\sqrt{2}, 2\}$, 均符合题意, $x+y$ 所有可能的取值

为 $-\sqrt{2}+1, 0, 2\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}+1$, 个数为 4.

15. 解: (1) 由条件可知 $a^2=a$, 解得 $a=0$ 或 1 , (2 分)

故 $A=\{0\}$ 或 $A=\{1\}$, 于是 $A \subseteq C$, (4 分)

故 $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B = B \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. (6 分)

(2) 由题意得 $A \subseteq B$. (7 分)

故 $a \in B, a^2 \in B$. (9 分)

当 $a=1$ 时, $A=\{1\}$ 符合题意; (10 分)

当 $a=2$ 时, $A=\{2, 4\}$ 符合题意; (11 分)

当 $a>2$ 时, $a^2>4$, 故 $a^2 \notin B$. (12 分)

综上, a 的值为 1 或 2. (13 分)

16. 解: (1) $a = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式为 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 < 0$, (1 分)

即 $(x+1)(x-2) < 0$, (3 分)

可得该不等式的解集为 $\{x \mid -1 < x < 2\}$. (6 分)

(2) 当 $a=0$ 时, $-1 < 0$ 显然成立, (9 分)

当 $a \neq 0$ 时, 由恒成立可知

$$\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = (-a)^2 + 4a < 0, \end{cases} \quad (12 \text{ 分})$$

解得 $-4 < a < 0$, (14 分)

综上, a 的取值范围是 $\{a \mid -4 < a \leq 0\}$. (15 分)

17. 解: (1) 由 $4 = a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$, (3 分)

可得 $(a+b)c \leq 4$, 当且仅当 $a+b=2, c=2$ 时等号成立. (6 分)

故 $(a+b)c$ 的最大值为 4. (7 分)

(2) 由 $8 = 2a + 2b + 2c = 2a + b + b + 2c \geq$

$$2\sqrt{(2a+b)(b+2c)}, \quad (10 \text{ 分})$$

可得 $(2a+b)(b+2c) \leq 16$, 当且仅当 $a=c, b=4-2a$ 时等号成立. (14 分)

故 $(2a+b)(b+2c)$ 的最大值为 16. (15 分)

18. 解: (1) $m=2$ 时, $A=\{x \mid 2 < x \leq 3\}$, (2 分)

$$\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x > 3\}, \quad (5 \text{ 分})$$

故 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{2, 4, 5\}$. (7 分)

(2) 当 $\frac{3}{2} < m < 2$ 时, $\frac{3}{2} < m < 2 < 2m-1 < 3$, 此时

A 中有且仅有一个整数元素 2, 满足题意. (9 分)

当 $m=2$ 时, $A=\{x \mid 2 < x \leq 3\}$, 此时 A 中有且仅有一个整数元素 3, 满足题意. (11 分)

当 $2 < m < \frac{5}{2}$ 时, $2 < m < 3 < 2m-1 < 4$, 此时 A 中有且仅有一个整数元素 3, 满足题意. (13 分)

当 $\frac{5}{2} \leq m < 3$ 时, $2 < m < 3 < 4 \leq 2m-1 < 5$, 此时

A 中有两个整数元素, 不合题意. (14 分)

当 $m \geq 3$ 时, $2m-1-m = m-1 \geq 2$, 此时 A 中至少有两个整数元素, 不合题意. (15 分)

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid \frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}\right\}$. (17 分)

19. 解: (1) 当 $k=1$ 时, $C=\{x \mid x^2-2x-3 \leq 0\}$, (1 分)

$$\text{解不等式 } (x-3)(x+1) \leq 0, \text{ 即 } C=\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}, \quad (2 \text{ 分})$$

解不等式 $(x-1)(x-3) \leq 0$, 即 $A=\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, (3 分)

故 $A \cup C = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$. (5 分)

(2) 证明: 解不等式 $|x - m| \leq 1$ 得 $-1 \leq x - m \leq 1$, 即 $B = \{x \mid m - 1 \leq x \leq m + 1\}$. (6 分)

解不等式 $x^2 - 2kx + k^2 - 4 \leq 0$ 得 $k - 2 \leq x \leq k + 2$, 即 $C = \{x \mid k - 2 \leq x \leq k + 2\}$. (7 分)

由 $|m - k| \leq 1$ 可得 $-1 \leq m - k \leq 1$. (8 分)

要证明 $B \subseteq C$, 等价于 $m - 1 \geq k - 2$ 且 $m + 1 \leq k + 2$. (9 分)

由 $-1 \leq m - k$, 即 $k - 1 \leq m$, 也即 $k - 2 \leq m - 1$,

由 $m - k \leq 1$, 即 $m \leq k + 1$, 也即 $m + 1 \leq k + 2$.

综上, 当 $|m - k| \leq 1$ 时, $B \subseteq C$. (11 分)

(3) 因为 $A \subseteq C$, 则 $k - 2 \leq 1$ 且 $k + 2 \geq 3$, 解得 $1 \leq k \leq 3$, (12 分)

因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 即集合 $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ 与 $\{x \mid m - 1 \leq x \leq m + 1\}$ 的交集不为空集,

即 $m + 1 \geq 1$ 且 $m - 1 \leq 3$, 解得 $0 \leq m \leq 4$, (13 分)

此时满足以下不等式: (a) $0 \leq m \leq 4$, (b) $1 \leq k \leq 3$, (c) $1 \leq m + k \leq 3$, (d) $1 \leq m - k \leq 3$.

由 (d) 有 $k \leq m - 1$.

结合不等式 (b) $k \geq 1$, 可知必须有 $1 \leq m - 1$, 即 $m \geq 2$.

再结合不等式 (c) $m + k \leq 3$ 和 $k \geq 1$, 可知 $m + 1 \leq m + k \leq 3$, 即 $m \leq 2$.

故 $m = 2$, (15 分)

将 $m = 2$ 代入条件 (c) 和 (d) 中, 得 $1 \leq 2 + k \leq 3$, 解得 $-1 \leq k \leq 1$,

$1 \leq 2 - k \leq 3$, 解得 $-1 \leq k \leq 1$,

又由 (b) $1 \leq k \leq 3$, 故 $k = 1$, 经检验, $k = 1$ 符合各不等式.

唯一满足的解是 $m = 2, k = 1$. (17 分)